Лекція № 12

4.7.1. Перетворення Лоренца для довільного напрямку руху системи відліку *S′* відносно *S*

Отримали перетворення Лоренца для напруженості (ф-ли (4.39)) для випадку руху системи S' відносно S уздовж осі x

$$E_x = E'_x;\quad E_y = \gamma\left(E'_y + \beta H'_z\right);\quad E_z = \gamma\left(E'_z - \beta H'_y\right);$$
$$H_x = H'_x;\quad H_y = \gamma\left(H'_y - \beta E'_z\right);\quad H_z = \gamma\left(H'_z + \beta E'_y\right);$$
$$\beta = \frac{V}{c};\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

В обернених перетвореннях зміниться знак перед швидкістю V $\beta \to -\beta$ та зміняться місцями штриховані на нештриховані компоненти напруженостей:

$$\begin{aligned} &E'_x = E_x;\quad E'_y = \gamma\left(E_y - \beta H_z\right);\quad E'_z = \gamma\left(E_z + \beta H_y\right);\\ &H'_x = H_x;\quad H'_y = \gamma\left(H_y + \beta E_z\right);\quad H'_z = \gamma\left(H_z - \beta E_y\right). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Напишемо перетворення (4.39) в векторному вигляді.

У напрямку осі x поле не змінюється:

$$\vec{E}_{\parallel} = E_x\vec{e}_x = E'_x\vec{e}_x = \vec{E}'_{\parallel};\quad \vec{H}_{\parallel} = H_x\vec{e}_x = H'_x\vec{e}_x = \vec{H}'_{\parallel}.$$

Перетворення перпендикулярних компонент згідно з (4.39):

$$\vec{E}_{\perp} = E_y\vec{e}_y + E_z\vec{e}_z = \gamma\left[E'_y\vec{e}_y + E'_z\vec{e}_z + \frac{1}{c}\left(VH'_z\vec{e}_y - VH'_y\vec{e}_z\right)\right] =$$

$$= \gamma\left[\underbrace{E'_y\vec{e}_y + E'_z\vec{e}_z}_{\vec{E}'_{\perp}} - \frac{1}{c}\underbrace{\left(-VH'_z\vec{e}_y + VH'_y\vec{e}_z\right)}_{[\vec{V},\vec{H}']}\right] = \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}']\right);$$

$$\vec{E}_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}'_{\perp} - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}']\right).$$

Врахували, що для частинних перетворень Лоренца векторний добуток це:

$$[\vec{V},\vec{H}'] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ H'_x & H'_y & H'_z \end{vmatrix} = -VH'_z\vec{e}_y + VH'_y\vec{e}_z$$

Аналогічно отримаємо

$$\vec{H}_\perp = H_y\vec{e}_y + H_z\vec{e}_z = \gamma\left[H'_y\vec{e}_y + H'_z\vec{e}_z + \frac{1}{c}\left(-VE'_z\vec{e}_y + VE'_y\vec{e}_z\right)\right] =$$

$$= \gamma\left[\underbrace{H'_y\vec{e}_y + H'_z\vec{e}_z}_{\vec{H}'_\perp} + \frac{1}{c}\underbrace{\left(-VE'_z\vec{e}_y + VE'_y\vec{e}_z\right)}_{[\vec{V},\vec{E}']}\right] = \gamma\left(\vec{H}'_\perp + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}']\right);$$

$$[\vec{V},\vec{E}'] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ V & 0 & 0 \\ E'_x & E'_y & E'_z \end{vmatrix} = -VE'_z\vec{e}_y + VE'_y\vec{e}_z;$$

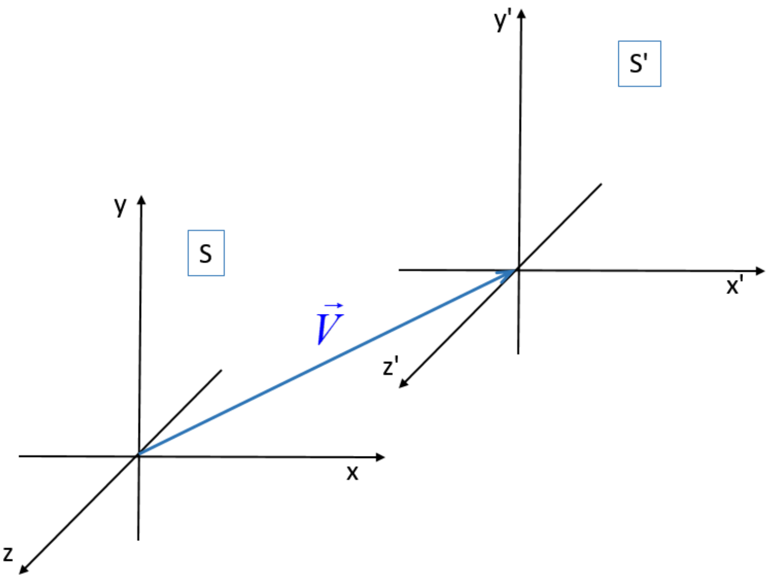
$$\vec{H}_\perp = \gamma\left(\vec{H}'_\perp + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}']\right).$$

Перетворення повних напруженостей

$$\vec{E} = \vec{E}'_{\parallel} + \gamma\left(\vec{E}'_\perp - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}']\right); \quad \vec{H} = \vec{H}'_{\parallel} + \gamma\left(\vec{H}'_\perp + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}']\right). \qquad (4.41)$$

Зауважимо, що в формулах (4.41) ніяк не відображено те, що рух відбувається уздовж осі *x*. Вони справедливі для будь якого напрямку швидкості. Треба тільки вважати всі три осі обох систем координат паралельними.

Узагальнимо отримані у векторному вигляді формули перетворення для векторів $\vec{E}$ та $\vec{H}$ (4.41) на випадок, коли система відліку S' відносно S рухається зі швидкістю $\vec{V}$ в довільному напрямку (див. рис.).



Ще раз розіб'ємо вектори $\vec{E}$ та $\vec{H}$, $\vec{E}'$ та $\vec{H}'$ на дві складові кожний

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}; \quad \vec{E}_{\parallel} \parallel \vec{V}; \quad \vec{E}_{\perp} \perp \vec{V};$$
$$\vec{H} = \vec{H}_{\parallel} + \vec{H}_{\perp}; \quad \vec{H}_{\parallel} \parallel \vec{V}; \quad \vec{H}_{\perp} \perp \vec{V};$$
$$\vec{E}' = \vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}; \quad \vec{E}'_{\parallel} \parallel \vec{V}; \quad \vec{E}'_{\perp} \perp \vec{V};$$
$$\vec{H}' = \vec{H}'_{\parallel} + \vec{H}'_{\perp}; \quad \vec{H}'_{\parallel} \parallel \vec{V}; \quad \vec{H}'_{\perp} \perp \vec{V};$$

Знов фактично отримаємо формули (4.41). Залишається виразити паралельні та перпендикулярні руху компоненти $\vec{E}'_{\parallel}, \vec{E}'_{\perp}, \vec{H}'_{\parallel}, \vec{H}'_{\perp}$ через відповідні проекції на напрямок руху та на площину, перпендикулярну руху:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}; \quad \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' - \vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}' - \frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2};$$
$$\vec{H}'_{\parallel} = \frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}; \quad \vec{H}'_{\perp} = \vec{H}' - \vec{H}'_{\parallel} = \vec{H}' - \frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}.$$

$$\vec{E} = \frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} + \gamma\left(\vec{E}' - \frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} - \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}']\right) =$$
$$= \gamma\left(\vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}']\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}.$$

$$\vec{H} = \frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} + \gamma\left(\vec{H}' - \frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}']\right) =$$
$$= \gamma\left(\vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}']\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}.$$

Перетворення Лоренца для напруженості у випадку довільного напрямку руху системи S' відносно S мають наступний вигляд

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \gamma\left(\vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}']\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{E}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}; \\ \vec{H} &= \gamma\left(\vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}']\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{H}', \vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}. \end{aligned} \qquad (4.42)$$

Обернені перетворення отримаємо, замінивши в (4.42) $\vec{V}$ на $-\vec{V}$ та одночасно $\vec{E} \rightleftarrows \vec{E}', \vec{H} \rightleftarrows \vec{H}'$:

$$\vec{E}' = \gamma\left(\vec{E} + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}]\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{E},\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2};$$
$$\vec{H}' = \gamma\left(\vec{H} - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}]\right) + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{H},\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}. \quad (4.43)$$

4.7.2. Аналіз формул загальних перетворень Лоренца для напруженості електромагнітного поля

Припустимо, що в деякій інерціальній системі відліку існує тільки електричне поле, тобто:

$$\vec{E}' \neq 0, \vec{H}' = 0.$$

Згідно з (4.42) отримаємо

$$\vec{E} = \gamma\vec{E}' + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{E}',\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2};$$
$$\vec{H} = \frac{\gamma}{c}[\vec{V},\vec{E}']. \quad (4.44)$$

Помножимо обидві частини першого з рівнянь (4.44) векторно на $\vec{V}$:

$$[\vec{V},\vec{E}] = \gamma[\vec{V},\vec{E}'] + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{E}',\vec{V}\right)}{V^2}\underbrace{[\vec{V},\vec{V}]}_{0} = \gamma[\vec{V},\vec{E}'];$$

Тепер друге з рівнянь (4.44) можна переписати так:

$$\vec{H} = \frac{\gamma}{c}[\vec{V},\vec{E}'] = \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}]. \quad (4.45)$$

Магнітне поле в цьому випадку перпендикулярно як електричному полю та і швидкості руху системи S' відносно S:

$$\vec{H} \perp \vec{V}, \vec{E}', \vec{E}.$$

Таким чином, якщо в деякій ІСВ відсутнє магнітне поле, то в усіх інших ІСВ, які рухаються відносно даної системи, магнітне поле існує та є перпендикулярним як електричному полю, так і швидкості руху. Співвідношення між $\vec{H}, \vec{E}$ та $\vec{V}$ визначено формулою (4.45).

Якщо в деякій ІСВ існує тільки магнітне поле, тобто

$$\vec{E}' = 0, \vec{H}' \neq 0,$$

то формули (4.42) приймають вигляд

$$\vec{E} = -\frac{\gamma}{c}[\vec{V},\vec{H}'];$$
$$\vec{H} = \gamma\vec{H}' + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{H}',\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2}. \qquad (4.46)$$

Множимо обидві частини другого з рівнянь (4.46) векторно на $\vec{V}$:

$$[\vec{V},\vec{H}] = \gamma[\vec{V},\vec{H}'] + (1-\gamma)\frac{\left(\vec{H}',\vec{V}\right)}{V^2}\underbrace{[\vec{V},\vec{V}]}_{=0} = \gamma[\vec{V},\vec{H}'].$$

Робимо висновок, що в усіх ІСВ, які рухаються відносно даної ІСВ, є і електричне, і магнітне поля, які перпендикулярні одне одному та напрямку відносного руху:

$$\vec{E} = -\frac{\gamma}{c}[\vec{V},\vec{H}'] = -\frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}]. \qquad (4.47)$$

Навпаки, якщо електричне та магнітне поля перпендикулярні в деякій системі відліку та не є однаковими по модулю, то існує така ІСВ, в якій одне з полів відсутнє. Яке саме, встановимо після вивчення параграфу інваріанти поля.

У випадку малих швидкостей формули перетворень (4.42) можна спростити, врахувавши тільки члени лінійні по малому параметру $|\vec{V}|/c \ll 1$:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2; \quad 1-\gamma \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{V}{c}\right)^2.$$

В лінійному по $|\vec{V}|/c \ll 1$ наближенні

$$\vec{E} = \underbrace{\gamma}_{\approx 1}\left(\vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}']\right) + \underbrace{(1-\gamma)}_{\approx 0}\frac{\left(\vec{E}',\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} \approx \left(\vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{H}']\right);$$
$$\vec{H} = \underbrace{\gamma}_{\approx 1}\left(\vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}']\right) + \underbrace{(1-\gamma)}_{\approx 0}\frac{\left(\vec{H}',\vec{V}\right)\vec{V}}{V^2} \approx \left(\vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{V},\vec{E}']\right).$$

Наближені формули мають вигляд

$$\vec{E} = \left(\vec{E}' - \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{H}'] \right);$$
$$\vec{H} = \left(\vec{H}' + \frac{1}{c}[\vec{V}, \vec{E}'] \right). \qquad (4.48)$$

4.8. Інваріанти поля

З компонент тензору електромагнітного поля можна побудувати інваріантні величини – величини, які не змінюються при переході від однієї ІСВ до іншої ІСВ.

Для антисиметричного тензору 2-рангу згортання по парі індексів є тривіальним «інваріантом», бо всі діагональні елементи дорівнюють нулю.

Можемо побудувати два інваріанти другого порядку по компонентах тензору F_{ik}:

$$F_{ik}F^{ik} - \text{inv.};$$
$$\varepsilon^{iklm}F_{ik}F_{lm} - \text{inv.} \qquad (4.49)$$

$F^{ik}F_{ik}$ – скаляр, $\varepsilon_{iklm}F^{ik}F^{lm}$ – псевдоскаляр.

Інваріанти (4.49) можна виразити через напруженості полів. Скористаємось формулами (4.31) та (4.32):

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}; \quad F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$F_{ik}F^{ik} = F_{0\alpha}F^{0\alpha} + F_{\alpha 0}F^{\alpha 0} + F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\left(F_{0\alpha}\right)^2 - \left(F_{\alpha 0}\right)^2 + (F_{\alpha\beta})^2 =$$
$$= 2\left(H_x^2 + H_y^2 + H_z^2\right) - 2\left(E_x^2 + E_y^2 + E_z^2\right) = 2\left(H^2 - E^2\right).$$

Так само

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} =$$
$$= (F_{01}F_{23} - F_{10}F_{23} - F_{01}F_{32} + F_{10}F_{32}) + (F_{23}F_{01} - F_{32}F_{01} - F_{23}F_{10} + F_{32}F_{10}) + ... =$$
$$= 8(F_{01}F_{23} + F_{02}F_{31} + F_{03}F_{12}) = -8\left(E_xH_x + E_yH_y + E_zH_z\right) = -8(\vec{E}, \vec{H}).$$

Інваріантами є такі комбінації напруженостей електричного та магнітного полів

$$H^2 - E^2 - \text{inv.} \quad (\vec{E},\vec{H}) - \text{inv.} \tag{4.50}$$

Два інваріанти (4.50) (або у вигляді (4.49)) вичерпують всі можливі інваріанти антисиметричного тензору другого рангу. Пояснити це твердження можна таким чином. Ми знаємо, що симетричний тензор другого рангу можна діагоналізувати. Для цього треба розв’язати рівняння на власні функції та власні значення. Рівняння на власні значення (для спрощення визначенням без поділу на контраваріантні та коваріантні компоненти, як це зроблено в старих виданнях «Теорії поля») має такий вигляд:

$$\text{Det}\left(F_{ik} - \lambda\delta_{ik}\right) = 0 \tag{4.51}$$

Det – це визначник. Для 4-простору отримаємо алгебраїчне рівняння 4-го порядку. Власні значення є інваріантами, як і коефіцієнти при степенях в рівнянні (4.51).

За тією ж схемою, можна знайти й всі інваріанти антисиметричного тензору, хоча тепер корені поліному не можна називати власними значеннями тензору. Коефіцієнти при степенях поліному є інваріантами відносно поворотів. Поліном матиме тільки парні степені, тобто є парною функцією λ:

$$f(\lambda) = \text{Det}\left(F_{ik} - \lambda\delta_{ik}\right) = \text{Det}\left(\begin{matrix} F_{ki} - \lambda\,\delta_{ki} \\ {\scriptstyle -F_{ik} \qquad \delta_{ik}} \end{matrix}\right) = \text{Det}\left(F_{ik} + \lambda\delta_{ik}\right) = f(-\lambda);$$

Антисиметричний тензор 2-го рангу у 4-просторі має тільки два інваріанти:

$$\lambda^4 + (H^2 - E^2)\lambda^2 - (\vec{E},\vec{H})^2 = 0.$$

Ще раз підкреслимо, що $H^2 - E^2$ – це скаляр, а $(\vec{E},\vec{H})$ – це псевдоскаляр.

Існування інваріантів поля (4.50) дозволяє обирати для вивчення руху заряду в електромагнітному полі найбільш зручну систему відліку.

Існування інваріантів поля (4.50) дозволяє зробити такі висновки.

За умови $(\vec{E},\vec{H}) = 0$, коли $\vec{E} \perp \vec{H}$ в деякій інерціальній системі відліку (ІСВ), напруженості будуть перпендикулярними в усіх інших інерціальних системах відліку.

За умови $E = H$ в деякій ІСВ, напруженості будуть однаковими у усіх інших ІСВ.

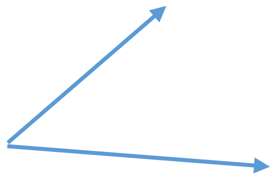
За умови $E > H$ в деякій ІСВ, напруженість електричного поля буде більшою ніж напруженість магнітного поля в усіх інших ІСВ.

За умови $E < H$ в деякій ІСВ, напруженість електричного поля буде меншою ніж напруженість магнітного поля в усіх інших ІСВ.

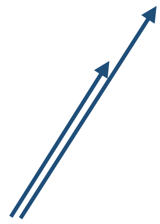
Якщо в деякій ІСВ $(\vec{E},\vec{H}) > 0$, тобто кут між векторами напруженостей є гострим, то кут залишатиметься гострим в усіх інших ІСВ.

Якщо в деякій ІСВ $(\vec{E},\vec{H}) < 0$, тобто кут між векторами напруженостей є тупим, то кут залишатиметься тупим в усіх інших ІСВ.

Якщо в деякій ІСВ кут між векторами $\vec{E}$ та $\vec{H}$ гострий, то існує ІСВ, в якій ці поля паралельні:



$(\vec{E},\vec{H}) > 0$



$\vec{E}_0 \parallel \vec{H}_0$

Два рівняння (4.50)

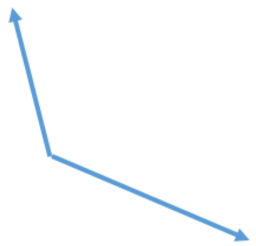
$$\begin{cases} H_0^2 - E_0^2 = H^2 - E^2; \\ E_0 H_0 = (\vec{E},\vec{H}). \end{cases}.$$

визначають абсолютні величини E_0 та H_0. Напрямок руху та величину швидкості відповідної системи відліку визначаємо за допомогою перетворень Лоренца.

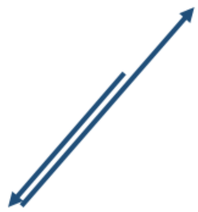
Якщо в деякій системі відліку поля є різними за абсолютною величиною $|\vec{E}| \neq |\vec{H}|$ та перпендикулярними $\vec{E} \perp \vec{H}$, тобто $(\vec{E},\vec{H}) = 0, E \neq H$, то існує ІСВ, в якій відсутнє одне з двох полів. Залишиться тільки більше за абсолютною величиною поле (див. (4.50)):

$$E > H, \quad E_0^2 = E^2 - H^2;$$
$$E < H, \quad H_0^2 = H^2 - E^2.$$

Коли $(\vec{E},\vec{H})<0$, існує ІСВ, в якій поля антипаралельні:



$(\vec{E},\vec{H})<0$



$\vec{E}_0 \parallel \vec{H}_0$

У випадку, коли обидва інваріанти дорівнюють нулю

$$(\vec{E},\vec{H})=0, \quad E=H$$

поля в будь-якій ІСВ залишаються перпендикулярними та однаковими за абсолютними величинами. Наприклад, так є для електромагнітних хвиль.